下學葊算書三種

下學葊算書目

錢塘項名達梅侶著

下學葊勾股六術序

余在都獲與項君梅侶交輒以數學相過從梅侶就精思當窮極要眇時雖寒暑饑渴不暇顧苟有得則欣然意適若無可喻於人嘗語余曰守中西成法搬衍較量疇人子弟優為之所貴學數者謂能推見本原融會以通其變竟古人未竟之緒而發古人未發之藏耳余是其言顧以碌碌走塵俗未遑卒業迨余筮仕浙梅侶亦主講苕南見所著勾股六術擊節稱善曰是足為數學導矣勾股乃學數初步極苦和較諸術之紛糅未入門先作門前之繞往往阻於難而

莫敢入得是術導之簡而明條焉而不紊一展卷瞭然矣且以見數有和較故變生變故參伍錯綜不可為典要其為物也雜而其為途也繁設非洞徹乎其原焉能齊雜以整御繁以約極其變而仍適得其常哉梅侶營立有弧三角總較術求橢圓弧綫術術雖定未有詮釋余促成之而義奧趣幽非旦夕可竟事是六術也獨先成雖未足見梅侶之深而所謂變通成法為古人竟其緒而發其藏者於是可見一班云

道光壬辰秋七月下浣三日順德黎應南序

勾股六術

錢塘項名達梅侶稾

勾股相求。舊術詳且備矣。惟和較諸題。術稍繁雜。礙學恆未了然。乙酉夏。偶與邵君魚竹陳君辛伯。縱論及此。爰取舊術稍爲變通。分術爲六。使題之相同者。通爲一術。苟得其意。釐然悉有以御之。繁雜可無復慮。亦足爲入門之一助云。

第一術

第一題

有勾有股求弦

法以勾股各自乘。相併爲實。平方開之。得弦。

第二題

有勾有弦求股

法以勾弦各自乘。相減為實。平方開之。得股。

第三題

有股有弦求勾

法以股弦各自乘。相減為實。平方開之。得勾。

第二術

第一題

有弦有勾股較求勾股

法以弦自乘倍之。與勾股較自乘相減為實。平方開

之。得勾股和。和較相加。折半為股。相減折半為勾。

第二題

有弦有勾股和求勾股

法以弦自乘倍之。與勾股和自乘相減為實。平方開之。得勾股較。和較相加折半為股。相減折半為勾。

第三術

第一題

有勾有股弦較求股弦

法以勾自乘為實。股弦較為法除之。得股弦和。和較相加折半為弦。相減折半為股。

第二題

有勾有股弦和求股弦

法以勾自乘爲實。股弦和爲法除之。得股弦較。和較相加折半爲弦。相減折半爲股。

第三題

有股有勾弦較求勾弦

法以股自乘爲實。勾弦較爲法除之。得勾弦和。和較相加折半爲弦。相減折半爲勾。

第四題

有股有勾弦和求勾弦

法以股自乘為實。勾弦和為法除之。得勾弦較和較相加折半為弦。相減折半為勾。

第四術

第一題

有勾弦較有股弦較求勾股弦

法以勾弦較股弦較相乘倍之為實。平方開之。得弦和較。迺置弦和較。與股弦較相加為勾。與句弦較相加為股。併勾弦較股弦較。與之相加為弦。

第二題

有勾弦和有股弦和求勾

法以勾弦和股弦和相乘倍之爲實平方開之得弦和和迺置弦和和與股弦和相減爲勾與勾弦和相減爲股併勾弦和股弦和與之相減爲弦

此以上諸法悉從舊術以下兩題術爲新定

第三題

有勾弦和有股弦較求勾股弦

法以勾弦和股弦較相乘倍之爲實平方開之得弦較較迺置弦較較與股弦較相減爲勾與勾弦和相減爲股併勾弦和股弦較與之相減爲弦

是題舊術以勾弦和股弦較相減得勾股和自乘之與勾弦和自乘相減又以股弦較自乘相加開

方得弦較較。取徑迂迴。且與前二題法不一例。今變通其術。使歸於同。其實勾弦和股弦較相乘之倍即弦較較自乘方。無事假途於勾股和也。

第四題

有勾弦較有股弦和求勾股弦

法以勾弦較股弦和相乘。倍之爲實。平方開之。得弦較和。迺置弦較和與股弦和相減爲勾。與勾弦較相減爲股。併勾弦較股弦和與之相減爲弦。

是題舊術以勾弦較股弦和相減得勾股和。自乘之。與股弦和自乘相減。又以勾弦較自乘相加開方得弦較和。事有同一理。而於此顯於彼則奧者。非理有顯奧。理之所寓有顯奧也。是術前二題舊術論之詳矣。

而未究後二題之本同一理。蓋以同名相乘直捷而易明。異名相乘雜糅而難見。謬為釋出。亦欲使立術歸於一。且見名不同。理無不同。窮理者即顯以求奧可耳。

第五術

第一題

有勾股較有弦和和較求勾股弦

法以弦和和較自乘。為長方積之倍。以勾股較為長闊較。用帶縱較數開方算之。二因倍積與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相減折半為股弦較。相加折半為勾弦較。如第四術第一題遞加之。得勾股弦。

第二題

有勾股較有弦和和求勾股弦

法以弦和和自乘爲長方積之倍。以勾股較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。二因倍積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相減折半爲勾弦和。相加折半爲股弦和。如第四術第二題遞減之。得勾股弦。

以上兩題。俱從舊術。下兩題及第六術皆新立。

第三題

有勾股和有弦較較求勾股弦

法以弦較較自乘。為長方積之倍。以勾股和為長闊較。用帶縱較數開方算之。二因倍積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相減折半為股弦較。相加折半為勾弦和。如第四術第三題遞減之。得勾股弦。

是題舊術以勾股和自乘得數。又以勾股和弦較較相加自乘得數。兩數相減折半為長方積。倍弦較較加勾股和為長闊和。用帶縱較和數開方算之。得闊為勾。

第四題

有勾股和有弦較和求勾股弦

法以弦較和自乘。為長方積之倍。以勾股和為長闊

較。用帶縱較數開方算之。二因倍積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相減折半爲勾弦較。相加折半爲股弦和。如第四術第四題遞減之。得勾股弦。

是題舊術以勾股和自乘得數。又以弦較和自乘得數兩數相加爲長方積。倍弦較和爲長闊較。用帶縱較數開方算之得闊爲弦。是術與第四術本根於一理。因勾弦股弦之和較互相乘得各長方。各倍之。適與和較相乘之四件自乘方等。第四術知長方兩邊因求得平方邊。是術知平方邊。及長方兩邊較。因求得長方兩邊。蓋一理之所通。極錯綜亦極齊整。題雖雜出。而所以御之者則甚約也。舊術雜求他件。固亦足以參校。究不如約歸一理。使初學易尋頭緒耳。

第六術

第一題

有股弦較有弦和和求勾股弦

法以股弦較弦和和相乘。為長方積。以股弦較為長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相加折半為弦較較。相減折半為勾。弦較較弦和和相減折半為股。股加股弦較為弦。捷法四因弦和和。與股弦較相加。轉乘股弦較。開方得長闊和。是、題舊術以弦和和股弦較相減自乘得數。兩數相減餘。兩歸之為長方積。以股弦較為長闊較。用較數開方算之得闊為勾。今者其長方積原即股弦較弦和和相乘之數。蓋兩數相

乘方原得和方較方相減四之一也。

第二題

有勾弦較有弦和和求勾股弦

法以勾弦較弦和和相乘爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。長闊和較相加折半爲弦較和。相減折半爲股。弦較和弦和和相減折半爲勾。勾加勾弦較爲弦。

捷法四因弦和和與勾弦較相加。轉乘勾弦較。開方得長闊和。

是題舊術以弦和和勾弦較相減自乘得數。相加自乘得數。兩數相減四歸之爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用帶較數開方算之。得闊爲股。今考其長方積。亦卽勾弦較弦和和相乘之數。毋庸兩次自

乘相減四歸也。

第三題

有股弦較有弦較和求勾股弦

法以股弦較弦較和相乘爲長方積。以股弦較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相減折半爲弦和較。相加折半爲勾。弦和較弦較和相加折半爲股。股加股弦較爲弦。捷法四因弦較和。與股弦較相加。轉乘股弦較。開方得長闊和。

是題舊術。以股弦較弦較和相減。自乘倍之。內減弦較和自乘數。餘爲長方積。以股弦較弦較和相減倍之。再減股弦較。餘爲長闊和。用和數開方算之。得闊折半爲勾股較。今考其長方。其闊爲二勾

股較共長爲二股內少一股弦較數輾轉相求。僅得勾股較不如徑求勾之直捷也。

第四題

有勾弦較有弦較較求勾股弦

法以勾弦較弦較較。相乘爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和較相減折半爲弦和較。相加折半爲股。弦和較弦較較相加折半爲勾。勾加勾弦較爲弦。

捷法四因弦較較。與勾弦較相加。轉乘勾弦較。開方得長闊和。

是題舊術。以弦較較自乘得數。又以勾弦較弦較較相加自乘得數。兩數相減。再以勾弦較自乘得數轉減前減餘數。折半爲長方積。以勾弦較爲長闊較。用較數開方算之。得長爲股。今考其長方積。

本即勾弦較弦較較相乘之數毋庸累次自乘展轉相減也。

第五題

有股弦和有弦較較求勾股弦

法以股弦和弦較較相乘爲長方積。以股弦和爲長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積。與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相加折半爲弦和和。相減折半爲勾。弦和和弦較較相減折半爲股。股減股弦和爲弦。

捷法四因弦較較。與股弦和相加、轉乘股弦和。開方得長闊和。

是題舊術以股弦和自乘得數。股弦和弦較較相加自乘得數。兩數相加爲長方積。以三股弦和與二弦較較相加爲長闊。用和數開方算之。得一闊折半爲弦。今考其長方。其闊爲二弦數。其長爲一

股二勾三弦數。取徑過迂。取數過大。由其不求勾而先求弦也

第六題

有勾弦和有弦較和求勾股弦

法以勾弦和弦較和相乘為長方積。以勾弦和為長闊較。用帶縱較數開方算之。四因積與長闊較自乘相加。開平方得長闊和。和和較相加折半為弦和和相減折半為股、弦和和弦較和相減折半為勾。勾減勾弦和為弦。

捷法四因弦較和與勾弦和相加轉乘勾弦和開方得長闊和。

是題舊術以勾弦和自乘得數。又以勾弦和弦較和相加自乘得數。兩數相加為長方積。以三勾弦和與二弦較和相加為長闊和。用和數開方算之。得闊折半為弦。今考其長方。其闊為二弦數。其長

爲一勾。二股三弦數取徑過迂取數過大由其不求股而先求弦也。

第七題

有股弦和有弦和較求勾股弦

法以股弦和弦和較相乘爲長方積。以股弦和爲長闊和。用帶縱和數開方算之。四因積。與長闊和自乘相減。開平方得長闊較。和較相加折半爲弦較和相減折半爲勾。弦較和弦和較相加折半爲股。股減股弦和爲弦。捷法四因弦和較。與股弦和相減轉乘股弦和開方得長闊較。

是題舊術。以股弦和自乘得數。又以股弦和弦和較相加轉與股弦和相乘得數。兩數相減爲長方積。以股弦和爲長闊和。用和數開方算之。得闊爲勾。今考其長方積實即股弦和弦和較相乘之數。

兩廉自乘相乘加減也。

第八題

有勾弦和有弦和較求勾股弦

法以勾弦和弦和較相乘爲長方積。以勾弦和爲長闊和。用帶縱和數開方算之。四因積。與長闊和自乘相減。開平方得長闊較。和較相減折半爲弦較較。相加折半爲股。若四因積。與長闊和自乘相減適盡。徑以長闊和折半爲弦較較。又爲股。弦較較弦和較相加折半爲勾。勾減勾弦和爲弦。是題得長闊較後。三因較。加兩弦和較。得數小於長闊和。或與之等。則有兩答。如本法求之。得一式勾股弦。又易弦較較爲股。股爲弦較較。另得一式勾股弦。若得數大於長闊和。第可如本法求之。不能互易。無兩答也。

捷法四因弦和和較與勾弦和相減轉乘勾弦和開方得長闊較是題舊術以勾弦和自乘得數又以勾弦和弦和較相加轉與勾弦和相乘得數兩數相減為長方積以勾弦和為長闊和用和數開方算之得長為股今考其長方積本即勾弦和弦和較相乘之數毋庸自乘相乘加減也是術八題意本一例意既同即立術不容或異今更定之較為條理井然一絲不紊而錯宗參伍亦莫不各盡其致矣

勾股弦及其和較凡十三件任舉二件皆可命題總計之題凡七十有八今六術中題止二十五者以其餘五十三題加減之可易為術中題也今詳列餘題題其加減法附於六術之後庶和較諸題於是備云

附題

有勾有勾股較求股弦

法以勾與勾股較。相加爲股。

有勾有勾股和求股弦

法以勾與勾股和。相減爲股。

有股有勾股較求勾弦

法以股與勾股較。相減爲勾。

有股有勾股和求勾弦

法以股與勾股和。相減爲勾。

有勾股較有勾股和求勾股弦

法以勾股較勾股和相減折半爲勾。相加折半爲股。

以上五題加減之。皆可得勾與股。迺以第一術第一題求弦法算之。

有勾有勾弦較求股弦

法以勾與勾弦較相加爲弦。

有勾有勾弦和求股弦

法以勾與勾弦和相減爲弦。

有弦有勾弦較求勾股

法以弦與勾弦較相減爲勾。

有弦有勾弦和求勾股

法以弦與勾弦和相減爲勾。

有勾弦較有勾弦和求勾股弦

法以勾弦較勾弦和相減折半爲勾。相加折半爲弦。

以上五題。加減之。皆可得勾與弦。迺以第一術第

二題求股法算之。

有股有股弦較求勾弦

法以股與股弦較相加爲弦。

有股有股弦和求勾弦

法以股與股弦和相減爲弦。

有弦有股弦較求勾股

法以弦與股弦較相減爲股。

有弦有股弦和求勾股

法以弦與股弦和相減爲股。

有股弦較有股弦和求勾股弦

法以股弦較股弦和相減折半爲股。相加折半爲弦。

以上五題加減之。皆可得股與弦迺以第一術第三題求勾法算之。

有弦有弦較較求勾股

法以弦與弦較較相減爲勾股較。

有弦有弦較和求勾股

法以弦與弦較和相減為勾股較。

有勾股較有弦較較求勾股弦

法以勾股較弦較較相加為弦。

有勾股較有弦較和求勾股弦

法以勾股較弦較和相減為弦。

有弦較較有弦較和求勾股弦

法以弦較較弦較和相加折半為弦。相減折半為勾股較。

以上五題。加減之。皆可得弦與勾股較。迺以第二術第一題求勾股法算之。

有弦有弦和較求勾股
法以弦與弦和較相加爲勾股和。
有弦有弦和和求勾股
法以弦與弦和和相減爲勾股和。
有勾股和有弦和較求勾股弦
法以勾股和弦和較相減爲弦。
有勾股和有弦和和求勾股弦
法以勾股和弦和和相減爲弦。
有弦和較有弦和和求勾股弦
法以弦和較弦和和相減折半爲弦。相加折半爲勾

股和

以上五題加減之。皆可得弦與勾股和。迺以第二術第二題求勾股法算之

有勾有弦和較求股弦

法以勾與弦和較。相減爲股弦較。

有勾有弦較較求股弦

法以勾與弦較較。相減爲股弦較。

有股弦較有弦和較求勾股弦

法以股弦較弦和較。相加爲勾。

有股弦較有弦較較求勾股弦

法以股弦較弦較較相減爲勾。
有弦和較有弦較較求勾股弦
法以弦和較弦較較相加折半爲勾。相減折半爲股弦較。
以上五題。加減之。皆可得勾與股弦較。迺以第三術第一題求股弦法算之。
有勾有弦較和求股弦
法以勾與弦較和相加爲股弦和。
有勾有弦和和求股弦
法以勾與弦和和相減爲股弦和。

有股弦和有弦較和求勾股弦

法以股弦和弦較和相減爲勾。

有股弦和有弦和和求勾股弦

法以股弦和弦和和相減爲勾。

有弦較和有弦和和求勾股弦

法以弦較和弦和和相減折半爲勾。相加折半爲股弦和。

以上五題。加減之。皆可得勾與股弦和。迺以第三術第二題求股弦法算之。

有股有弦和較求勾弦

法以股與弦和較。相減爲勾弦較。

有股有弦較和求勾弦

法以股與弦較和。相減爲勾弦較。

有勾弦較有弦和較求勾股弦

法以勾弦較弦和較。相加爲股。

有勾弦較有弦較和求勾股弦

法以勾弦較弦較和。相減爲股。

有弦和較有弦較和求勾股弦

法以弦和較弦較和。相加折半爲股。相減折半爲勾弦較

以上五題。加減之。皆可得股與勾弦較。適以第三術第三題求勾弦法算之

有股有弦較較求勾弦

法以股與弦較較相加爲勾弦和。

有股有弦和和求勾弦

法以股與弦和和相減爲勾弦和。

有勾弦和有弦較較求勾股弦

法以勾弦和弦較較相減爲股。

有勾弦和有弦和和求勾股弦

法以勾弦和弦和和相減爲股。

有弦較較有弦和和求勾股弦

法以弦較較弦和和相減折半爲股。相加折半爲勾弦和。

以上五題。加減之。皆可得股與勾弦和。迺以第三術第四題求勾弦法算之。

有勾股較有股弦較求勾股弦

法以勾股較股弦較相加爲勾弦較。

有勾股較有勾弦較求勾股弦

法以勾股較勾弦較相減爲股弦較。

以上二題加減之。皆可得勾弦較股弦較。迺以第

四術第一題求勾股弦法算之。

有勾股較有股弦和求勾股弦

法以勾股較股弦和相減爲勾弦和。

有勾股較有勾弦和求勾股弦

法以勾股較勾弦和相加爲股弦和。

以上二題加減之皆可得勾弦和股弦和。適以第

四術第二題求勾股弦法算之。

有勾股和有股弦較求勾股弦

法以勾股和股弦較相加爲勾弦和。

有勾股和有勾弦和求勾股弦

法以勾股和勾弦和。相減爲股弦較。
以上二題。加減之。皆可得勾弦和股弦較迺以第
四術第三題求勾股弦法算之。
有勾股和有股弦和求勾股弦
法以勾股和股弦和相減爲勾弦較。
有勾股和有勾弦較求勾股弦
法以勾股和勾弦較。相加爲股弦和。
以上二題。加減之。皆可得勾弦較股弦和。迺以第
四術第四題求勾股弦法算之。

勾股六術圖解

第一術

弦方丙。兼有一勾方。一股方。何也。如圖。甲乙丙勾股。庚己甲。辛戊庚。丙丁辛。皆與之等、乙丙爲勾。甲己、戊、庚辛丁皆等甲乙爲股。庚己、辛戊、丙丁、皆等甲丙爲弦。甲庚、庚辛、辛丙、皆等。則甲庚丙辛。必爲弦自乘方。迺移丙丁辛勾股。置於甲壬庚。移辛戊庚勾股。置於丙癸甲。又自戊至子作線截之、則易爲癸子丙丁一股方。子壬

戊庚一勾方矣。蓋丙丁爲股。丙癸亦爲股。則癸子丙丁必爲股自乘方。戊庚爲勾。壬庚亦爲勾。則子壬戊庚必爲勾自乘方。故勾股求弦。以勾方股方相加爲弦方。勾弦求股。以勾方弦方相減爲股方。股弦求勾。以股方弦方相減爲勾方。皆平方開之。得勾股弦也。

第二術

弦方倍之。兼有一勾股較方。一勾股和方。何也。如圖．甲丁辛勾股形。甲丁丙戊爲弦方。甲丁爲弦．四邊皆等。故爲弦方丙

荅甲丁辛．丁戊已．戊丙庚．丙甲乙．四勾股積。已庚辛乙一勾股較方。丁辛股減丁已勾。餘已辛爲勾股較辛乙．乙庚．庚已．皆等。故爲勾股較方

若倍之。必內容八勾股積。二勾股較方矣。又壬子癸丑爲勾股和方。壬丁勾加丁子股。得壬子。爲勾股和。子丑、丑癸、癸壬、皆等。故爲勾股和方。內容甲壬丁等八勾股積。己庚辛乙一勾股較方。比

之兩弦方。尚少一勾股較方。則兩弦方內。卽兼有一勾股較方。一勾股和方矣。故有弦有勾股較。以弦自乘倍之。爲兩弦方。內減勾股較自乘方。餘爲勾股和自乘方。平方開之。得勾股和。有弦有勾股和。亦以弦自乘倍之。爲兩弦方。內減勾股和自乘方。餘爲勾股

較自乘方。平方開之。得勾股較也。

第三術

凡股弦較股弦和相乘方。其積與勾自乘方等。勾弦較勾弦和相乘方。其積與股自乘方等。何也。蓋弦方內。原兼有一勾方、一股方。故減股方餘爲勾方。減勾方餘爲股方。如圖設甲乙爲弦。甲丙庚等乙爲股。乙己等於甲乙丙丁弦方內。減庚乙戊己股方。餘甲庚丙戊丁己磬折形。必與勾方等積。若以磬折形內戊己辛丁長方。移至丙辛壬癸位。則磬折形易

爲甲庚壬癸長方。其闊甲庚。即股弦較。庚乙股減甲乙弦餘甲庚即股弦較其長邊甲壬。即股弦和。丙壬即丁辛亦即庚乙皆爲股加甲丙弦得甲壬即股弦和此長方亦必與勾方等積。故以勾自乘爲勾方。即可爲甲壬庚癸長方。在有較求和者。則以甲庚股弦較除之。而得甲壬股弦和。在有和求較者。則以甲壬股弦和除之。而得甲庚股弦較也。設甲乙爲弦。庚乙爲勾。則磬折形所易之長方。必與股方等積。其闊邊甲庚。即勾弦較。長邊甲壬。即勾弦和。故以股自乘爲股方。即可爲甲庚壬癸長方。較求和。以甲庚勾弦較除之。而得甲壬勾弦和。和求較。以甲壬勾弦和

除之。而得甲庚勾弦較同一理也。

第四術第五術

是兩術本同一理。故可合論。又須先明加減。而後乘除等積之故。顯然易明。故首論加減。

弦和較。卽勾較較。股較較。何也。如前圖。甲乙爲勾。乙丙爲股。丁丙爲弦。則甲丙卽勾股和。乙丁卽股弦較。以甲丙勾股和。與丁丙弦相減。餘甲丁爲弦和較。而此甲丁者。又卽甲乙勾。乙丁股弦較相減數。是亦勾與股弦較之較也。故卽勾較較。如後圖甲乙爲勾。乙丙爲股。甲丁

爲弦。則甲丙卽勾股和。乙丁卽勾弦較。以甲丙勾股和。與甲丁弦相減。餘丁丙爲弦和較。而此丁丙者。又卽乙丙股。乙丁勾弦較相減數。是亦股與勾弦較之較也。故卽股較較。

弦和和。卽勾和和。股和和。何也。如前圖甲乙爲勾。乙丙爲股。丙丁爲弦。則甲丙卽勾股和。乙丁卽股弦和。

以甲丙勾股和。與丙丁弦相加。得甲丁爲弦和和。而此甲丁者。又卽甲乙勾。乙丁股弦和相加數。是亦勾與股弦和之和也。故卽勾和和。如後圖甲乙爲勾。乙丙爲股。丁甲爲弦。則

甲丙卽勾股和。丁乙卽勾弦和。以甲丙勾股和。與丁甲弦相加。得丁丙爲弦和和。而此丁丙者。又卽乙丙股。丁乙勾弦和相加數。是亦股與勾弦和之和也。故卽股和和。

弦較較。卽勾較和。股和較。何也。如前圖甲乙爲勾。甲丙爲股。丁丙爲弦。則乙丙卽勾股較。丁甲卽股弦較。以乙丙勾股較。與丁丙弦相減。餘丁乙爲弦較較。而丁乙者。又卽甲乙勾。丁甲股弦較相加數。是亦勾與股弦較之和也。故卽勾較和。如後圖甲乙爲勾。甲丙爲股。乙丁爲

弦。則乙丙即勾股較。甲丁即勾弦和。以乙丙勾股較。與乙丁弦相減。餘丙丁為弦較較。而丙丁者。又即甲丙股。甲丁勾弦和相減數。是亦股與勾弦和之較也。故即股和較。

弦較和。即勾和較。股較和。何也。如前圖甲乙為勾。甲丙為股。丙丁為弦。則乙丙即勾股較。甲丁即股弦和。以乙丙勾股較。與丙丁弦相加。得乙丁為弦較和。而此乙丁者。又即甲乙勾。甲丁股弦和相減數。是亦勾與股弦和之較也。故即勾和較。如後圖甲乙為勾。甲丙為股。丁乙為弦。則

丁　丙　乙　甲

丁　甲　乙　丙

乙丙卽勾股較。丁甲卽勾弦較。以乙丙勾股較。與丁乙弦相加。得丁丙爲弦較和。而此丁丙者。又卽甲丙股。丁甲勾弦較相加數。是亦股與勾弦較之和也。故卽股較和。

勾股較。卽勾弦較股弦較之較。何也。如圖甲乙爲勾。

丁丙乙　甲

甲丙爲股。甲丁爲弦。則乙丙卽勾股較。乙丁卽勾弦較。丙丁卽股弦較。以乙丁勾弦較。丙丁股弦較。相減。餘乙丙。卽勾股較。是則勾股較者。亦勾弦較股弦較之較也。

勾股較。卽勾弦和股弦和之較何也。如圖甲乙爲勾。

甲丙爲股。丁甲爲弦。則乙丙即勾股較。丁乙即勾弦和。丁丙即股弦和。以丁乙勾弦和丁丙股弦和。相減餘乙丙。即勾股較。是則勾股較者。亦勾弦和股弦和之較也。

丁　甲　乙丙

勾股和。即勾弦和股弦較之較。何也。如圖甲乙爲勾。乙丙爲股。乙丁爲弦。則甲丙即勾股和。甲丁即勾弦和。丙丁即股弦較。以甲丁勾弦和丙丁股弦較相減餘甲丙。即勾股和。是則勾股和者。亦勾弦和股弦較之較也。

甲　乙　丙丁

勾股和。即勾弦較股弦和之較。何也。如圖甲乙爲勾。

乙丙爲股。乙丁爲弦。則甲丙卽勾股和。甲丁卽勾弦較。丙丁卽股弦和。以甲丁勾弦較丙丁股弦和相減餘甲丙。卽勾股和。是則勾股和者。亦勾弦較股弦和之較也。

丙　乙　甲　丁

和較生於加減。加減相疊而和較之名。每可以互通。究之殊其名。不殊其實。以上數則乃其要者。閱圖自明。

勾弦較股弦較相乘爲長方。其長闊較。卽勾股較。倍其積與弦和較自乘方等。何也。如圖甲乙爲弦。甲丙等。甲庚爲股。丑辛寅辛皆等。戊乙爲勾。戊壬等。則庚乙必爲股弦

較、[丁丑甲寅皆等]甲戊必爲勾弦較、[等]丁己戊乙勾、減庚乙股弦較、餘戊庚、甲庚股、減甲、戊勾弦較、亦餘戊庚、則戊庚必爲弦和較[以弦和較、則勾較較股較較故也、說見加減法壬癸壬子皆等]。壬戊己乙一勾方、丙丑寅辛一股方相加、既與丙甲乙丁一弦方等積、則丑甲癸戊及寅子丁己勾弦較股弦較相乘兩長方、亦必與壬癸子辛弦和較自乘方等積矣。[蓋勾方股方相加、較之弦方、壘一壬癸子辛方、而空丑甲癸戊寅子丁己兩長方、則所空者、必與所壘者等積、]故有勾弦較股弦較、則以兩較相乘倍之、爲丑甲癸戊寅子丁己兩長方、亦即爲壬癸

子辛一正方。平方法開之。得癸辛弦和較。即戊庚。置戊庚弦和較。加庚乙股弦較。得戊乙勾。加甲戊勾弦較。得甲庚股。加庚乙股弦較。甲戊勾弦較。得甲乙弦。又勾弦較股弦較相減。即勾股較。說見加減法。今丑甲癸戊長方。其長闊兩邊。既爲勾弦較股弦較。則其兩邊較。必爲勾股較。故有勾股較弦和較。則以弦和較自乘。爲壬癸子辛方。半之。即丑甲癸戊長方積。乃以勾股較爲長闊兩邊較。用帶縱開方筭之。得闊邊爲股弦較。長邊爲勾弦較。

勾弦和股弦和相乘爲長方。其長闊較即勾股較。倍

其積。與弦和和自乘方等何也。如圖寅戊爲弦。（庚己巳丑皆等）戊乙爲股、（壬子子癸皆等）甲寅爲勾、（辛甲等）則寅乙必爲股弦和、（丙辛等）甲戊必爲勾弦和。（辛丑癸乙皆等）甲寅勾加寅乙股弦和得甲乙戊乙股。加甲戊勾弦和。亦得甲乙。則甲乙必爲弦和和。（以弦和和即勾和和股和和也。說見加減法丙甲等）辛甲己寅一勾方。壬子丁癸一股方。相加既與庚己子丑一弦方等積。則丙辛壬丑及庚寅癸乙勾弦和股弦和相乘兩長方。亦必與丙甲丁乙弦和和自乘方等積矣。（蓋此兩長方相加所疉者爲庚己子丑弦方。所空者爲辛甲己寅勾方壬子丁

癸股方以所盈補其所空即成丙甲丁乙弦和和方。故有勾弦和股弦和。則以兩和相乘倍之。為丙辛壬丑庚寅癸乙兩長方。亦即為丙甲丁乙一正方。平方法開之。得甲乙弦和和。置甲乙弦和和。減寅乙股弦和。得甲寅勾。減甲戊勾弦和。得戊乙股。併甲戊勾弦和。寅乙股弦和。與之相減。即寅戊弦。又勾弦和股弦和相減。即勾股較。說見弧矢法今庚寅癸乙長方。其長闊兩邊。既為勾弦和股弦和。則其兩邊較。必為勾股較。故有勾股較弦和和。則以弦和和自乘。為丙甲丁乙方。半之。即寅庚癸乙長方積。乃以勾股較。為長闊兩邊較。用帶縱開方算之。得

闊還為勾弦和。長還為股弦和。勾弦和股弦較相乘為長方、其長闊較。卽勾股和。倍其積。與弦較較自乘方等。何也。如圖甲丁為弦。甲乙等。甲己為股。甲戊等。丁卯為勾。丙壬癸丙皆等。則己丁乙戊皆卽股弦較。乙壬丑己皆卽勾弦和。丁卯勾。加己丁股弦較。得己卯。甲己股。減甲卯勾弦和。亦得己卯。則己卯必為弦較較。以弦較較。卽勾較和股和較也。說見加減法。丑庚庚子皆等。乙甲丙丁弦方內減去戊甲庚己股方。餘乙戊丙庚丁己磬折形。必與癸丙辛壬勾方等積。

此勾方。若加一丑癸庚丙子壬罄折形。卽爲丑庚辛子弦較較自乘方。則乙戊丙庚丁己罄折形。若加一丑癸庚丙子壬罄折形。亦必爲丑庚辛子弦較較自乘方而此兩罄折形相加。原不異於乙戊壬子癸丑己丁兩長方相加。然則己丁股弦較。丁癸勾弦和相乘倍之爲兩長方。亦卽與丑庚辛子弦較較方等積。矣。故有勾弦和股弦較。則以一和一較相乘倍之。爲乙戊壬子癸丑己丁兩長方。亦卽爲丑庚辛子一正方。平方法開之。得己卯弦較較。卽丑辛置己卯弦較較。減丁己股弦較。得丁卯勾。減甲卯勾弦和。得甲己股。

併已丁股弦較。甲卯勾弦和。與之相減。卽甲丁弦。又勾弦和股弦較相減。卽勾股和。說見加減法。今丑已癸丁長方。其長闊兩邊。旣爲勾弦和股弦較。則其兩邊較。必爲勾股和。故有勾股和。弦較較。則以弦較較自乘。爲丑庚辛子方半之。卽丑已癸丁長方積。乃以勾股和爲長闊兩邊較。用帶縱開方算之。得闊邊爲股弦較。長邊爲勾弦和。

勾弦較股弦和相乘爲長方。其長闊較卽勾股和。倍其積。與弦較較和自乘方等。何也。如圖甲已爲弦。癸卯乙癸皆等。已丁爲股。卯已等。甲戊爲勾。乙壬壬子皆等。則壬癸戊已皆

即勾弦較。癸午庚戊皆即股弦和。甲戊勾減甲丁股。弦和得戊丁。已丁股。加戊已勾弦較。亦得戊丁。則戊丁必為弦較和。以弦較和。即勾和較股較和也。說見加減法。辰丁等。乙癸辛卯弦方內。減去

乙壬庚子勾方。餘辛庚卯子癸壬磬折形。必與卯已午丁股方等積。此股方若加一辰午子卯戊已磬折形。即為子戊辰丁弦較和自乘方。則辛庚卯子癸壬。磬折形。若加一辰午子卯戊已磬折形。亦必為子戊辰丁弦較和自乘方。而此兩磬折形相加。原不異於

壬癸辰午庚戊辛巳兩長方相加。然則壬癸勾弦較。癸午股弦和。相乘倍之爲兩長方。亦卽與子戊辰丁弦較和方等積矣。故有勾弦較股弦和。則以一較一和相乘倍之。爲壬癸辰午庚戊辛巳兩長方。亦卽爲子戊辰丁一正方。平方法開之。得戊丁弦較和。置戊丁弦較和。減甲丁股弦和。得甲戊勾。減戊巳勾弦較。得巳丁股。併甲丁股弦和。戊巳勾弦較。與之相減。得甲巳弦。又勾弦較股弦和相減。卽勾股和。說見加減法。今壬癸辰午長方。其長闊兩邊。旣爲勾弦較股弦和。則其兩邊較。必爲勾股和。故有勾股和。弦較和。則以弦

較和自乘。爲子戊辰丁方。半之卽壬癸辰午長方積。乃以勾股和爲長闊兩邊較。用帶縱開方算之。得闊邊爲勾弦較。長邊爲股弦和。

以上圖解凡四。前二本舊術。後二發明新術之所以然。葢勾弦較股弦較相乘倍之。卽弦和較自乘積。勾弦和股弦和相乘倍之。卽弦和和自乘積。其理顯。勾弦和股弦較相乘倍之。卽弦較較自乘積。勾弦較股弦和相乘倍之。卽弦較和自乘積。其理隱。故舊術第載前二法。而法猶未備。今特補之。并繪圖以著其理。亦可見理本同原。卽乘除開方之法。亦歸一例矣。

第四術用開平方法。第五術用帶縱開方法。法雖異而理則同。故並論之。

第六術

股弦較弦和和相乘。與勾乘弦較較等積。因以股弦較爲長闊較。何也。加圖甲乙爲勾。戊巳戊壬皆等乙丙爲股。丙等。子丙丁爲弦。則子丁必爲股弦較。丁辛甲戊皆等。乙丁必爲股弦和。以甲乙勾。與乙丁股弦和相加。得甲丁爲弦和和。以戊壬勾與甲戊股弦較相加。得甲壬爲弦較較。說見加減。戊壬巳癸勾方。原與乙巳丁辛股弦較股

弦和相乘方等積。若各加一甲戊乙巳長方。則甲戊丁辛股弦較弦和和相乘方。亦必與甲壬乙癸勾乘弦較較方等積矣。故有股弦較弦和和。則以兩數相乘。為甲戊丁辛長方。亦可為甲壬乙癸長方。其長邊甲壬闊邊壬癸之較。壬癸即戊壬。即甲戊股弦較。乃用帶縱開方法算之。得闊邊壬癸為勾。以甲乙勾減甲丁弦和和。得乙丁股弦和。乃與股弦較相加減。各折半為弦與股也。

勾弦較弦和和相乘。與股乘弦較和等積。因以勾弦較為長闊較。何也。如圖甲乙為股。戊巳戊壬皆等乙丙為勾。

丙子等丙丁爲弦。則子丁必爲勾弦較。丁辛甲戊皆等乙丁必爲勾弦和。以甲乙股與乙丁勾弦和相加。得甲丁爲弦和和。以戊壬股與甲戊勾弦較相加。得甲壬爲弦較和。說見加減戊壬巳癸股方。原與乙巳丁辛勾弦較勾弦和相乘方等積。若各加一甲戊乙巳長方。則甲戊丁辛勾弦較弦和和相乘方。亦必與甲壬乙癸股乘弦較和方等積矣。故有勾弦較弦和和。則以兩數相乘。爲甲戊丁辛長方。亦可爲甲壬乙癸長方。其長邊甲壬闊邊壬癸之較。卽甲戊勾弦較。乃

用帶縱闊方法算之。得闊邊壬癸爲股。以甲乙股。減甲丁弦和和。得乙丁勾弦和與勾弦較相加減。各折半爲弦與勾也。股弦較弦較和相乘。與勾乘弦和較等積。因以股弦較爲長闊較。何也。加圖甲乙爲勾。（甲壬壬癸皆等）甲丙爲股。（甲戊丁辛丙子等。）丙丁爲弦。則子丁必爲股弦較。（皆等。）甲丁必爲股弦和。以甲乙勾。與甲丁股弦和相減。餘乙丁爲弦較和。以甲壬勾。與甲戊股弦較相減。餘戊壬爲弦和較。（說見加減）甲壬乙癸勾方。原與甲戊丁辛股弦較股弦和相乘

方等積。若各減一甲戊乙已方。則乙已丁辛股弦較弦較和相乘方。亦必與戊壬已癸勾乘弦和較方等積矣。故有股弦較。弦較和。則以兩數相乘。為乙已丁辛長方。亦可為戊壬已癸長方。其闊邊戊壬長邊壬癸之較。卽甲戊股弦較。乃用帶縱開方法算之。得長邊壬癸為勾。以甲乙勾。加乙丁弦較和。得甲丁股弦和。與股弦較相加減。各折半為弦與股也。

勾弦較弦較較相乘。與股乘弦和較等積。因以勾弦較為長闊較。何也。如圖甲乙為股。甲壬壬癸皆等。甲丙為勾。丙子等。丙丁為弦。則子丁必為勾弦較。子丑甲戊皆等。甲丁亦

必為勾弦和。以甲乙股、與甲丁勾弦和相減。餘乙丁為弦較較。以甲壬股。與甲戊勾弦較相減。餘戊壬為弦和較。說見加減甲壬乙癸股方。原與甲戊丁辛勾弦較勾弦和相乘方等積。若各減一甲戊乙己長方。則乙己丁辛勾弦較弦較較相乘方。亦必與戊壬己癸股乘弦和較方等積矣。故有勾弦較弦較較。則以兩數相乘。為乙己丁辛長方。亦可為戊壬己癸長方。其闊邊戊壬長邊壬癸之較。即甲戊勾弦較。乃用帶縱開方法算之。得長邊壬癸為股。以甲乙股。加乙丁弦較較。得甲丁

勾弦和與勾弦較相加減。各折半為弦與勾也。股弦和弦較較相乘。與勾乘弦和和等積。因以股弦和為長闊較。何也。如圖甲乙為勾。甲戊等乙丙為股。丙子等。丙丁為弦。則子丁必為股弦較。丑辛丑卯巳壬皆等。乙丁必為股弦和。己辛等。以甲乙勾。與乙丁股弦和相加。得甲丁為弦和和。以乙己勾。與己壬股弦較相加。得乙壬為弦較較。說見加減。甲戊乙己勾方。原與己壬辛癸股弦較股弦和相乘方等積。若各加一乙己丁辛長方。則乙壬丁癸股弦和弦較較相乘方。亦必與甲戊丁辛

勾乘弦和和相等積矣。故有股弦和。弦較較。則以兩數相乘為乙壬丁癸長方。亦可為甲戊丁辛長方。其長邊甲丁闊邊甲戊之較。即乙丁股弦和。乃用帶縱開方法算之。得闊邊甲戊為勾。以乙己勾。減乙壬弦較較。餘已壬為股弦較。與股弦和相加減。各折半為弦與股也。

勾弦和弦較和相乘。與股乘弦和和等積。因以勾弦和為長闊較。何也。如圖甲乙為股。甲戊等乙丙為勾。丙子等丙丁為弦。則子丁必為勾弦較。丑辛丑卯己壬皆等乙丁必為勾弦和。己辛等以甲乙股。與乙丁勾弦和相加。得甲

丁爲弦和和。以乙已股。與已壬勾弦較相加。得乙壬爲弦較和。說見加減甲戊乙已股方。原與已壬辛癸勾弦較勾弦和相乘方等積。若各加一乙已丁辛長方。則乙壬丁癸勾弦和弦較和相乘方。亦必與甲戊丁辛股乘弦和和方等積矣。故有勾弦和。弦較和。則以兩數相乘。爲乙壬丁癸長方。亦可爲甲戊丁辛長方。其長邊甲丁闊邊甲戊之較。即乙丁勾弦和。乃用帶縱開方法算之。得闊邊甲戊爲股。以乙已股減乙壬弦較和。餘已壬爲勾弦較。與

勾弦和相加減。各折半爲弦與勾也。股弦和弦和較相乘。與勾乘弦較和等積。因以股弦和爲長闊和。何也。如圖甲乙爲勾。甲戊等。甲丙爲股。丙子等。丙丁爲弦。則子丁必爲股弦較。午癸午丑寅戊皆等。甲丁必爲股弦和。戊辛等。以甲乙勾。與甲戊勾。丁股弦和相減。餘乙丁爲弦較和。以甲戊勾與寅戊股弦較相減。餘甲寅爲弦和較。說見加減甲戊乙巳勾方。原與寅戊癸辛股弦較股弦和相乘方等積。若各減一寅戊壬巳方。又各加一乙壬丁癸方。則甲寅丁癸股弦和弦和較相乘方。亦必與

乙已丁辛勾乘弦較和方等積矣。故有股弦和。弦和較、則以兩數相乘。爲甲寅丁癸方。亦可爲乙已丁辛長方。其長邊乙丁闊邊乙已（卽甲乙）之和。卽甲丁股弦和。乃用帶縱開方法算之。得闊邊乙已爲勾。以乙已勾。減乙壬弦和較。餘壬已爲股弦較。與股弦和相加減。各折半爲弦與股也。

勾弦和弦和較相乘。與股乘弦較較等積。因以勾弦和爲長闊和。何也。如圖甲乙爲股。（甲戊等）甲丙爲勾。（丙子等。）丙丁爲弦。則子丁必爲勾弦較。（午癸午丑寅戌皆等）甲丁必爲勾弦和。（寅癸等。）以甲乙股。與甲丁勾弦和相減。餘乙

丁爲弦較較。以甲戊股。與寅戊勾弦較相減。餘甲寅爲弦和較。說見加減。甲戊乙巳股方。原與寅戊癸辛勾弦較勾弦和相乘方等積。若各減一寅戊卯巳方。又各加一乙卯丁癸方。則甲寅丁癸勾弦和弦和較相乘方。亦必與乙巳丁辛股乘弦較較方等積矣。故有勾弦和。弦和較。則以兩數相乘。爲甲寅丁癸長方。亦可爲乙巳丁辛長方。其長邊乙巳亦可爲闊邊。闊邊乙丁亦可爲長邊。之和。卽甲丁勾弦和。乃用帶縱開方算之。得長邊乙巳爲股。或得闊邊爲乙巳。以甲乙股。減甲寅弦和較。餘

寅戊爲勾弦較。與勾弦和相加減。各折半爲弦與勾也。

第八題何以一問可兩答也。以帶縱方之長闊兩邊。一爲股。一爲弦較較。股可大於弦較較。亦可小於弦較較。一大一小。故有兩答也。然亦有無兩答者。何也。股雖可小於弦較較。而勾弦較不能小於股弦較。股內減弦和較。餘爲勾弦較。弦較較內減弦和較。餘爲倍股弦較。若股與弦較較互易。勾弦較與倍股弦較亦必互易。半其勾弦較。而與倍股弦較等。或小於倍股弦較。則此勾弦較。可易爲倍股弦較。倍股弦較。可

易為勾弦較。無勾弦較小股弦較大之患。至半其勾弦較。仍大於倍股弦較。則不能互易。易之勾弦較必小於股弦較。故無兩答也。術中三因長闊較。加兩弦和較。與長闊和比其大小。以定兩答之有無何也。是題長闊較。為股與弦較較之較。亦卽一勾弦較倍股弦較之較。長闊和。為股與弦較較之和。亦卽兩弦和較一勾弦較倍股弦較之和。半其勾弦較與倍股弦較等者。倍股弦較若一。勾弦較必二。兩相較為一。兩相和為三。較得和三之一。三其較。必與一勾弦較倍股弦較之和等。加兩弦和較。必與長闊和等。半其勾

弦較。小於倍股弦較者。較必小於和三之一。三其較。必小於一勾弦較倍股弦較之和。加兩弦和較。必小於長闊和。半其勾弦較大於倍股弦較者。較必大於和三之一。三其較。必大於一勾弦較倍股弦較之和。加兩弦和較。必大於長闊和。故三長闊較。兩弦和較相加。與長闊和比其大小。猶之以半勾弦較與倍股弦較比其大小。可以定兩答之有無也。

重論第四五六術

以上圖解第一二三術及第四術之前二題。悉本舊解。餘爲更定術。亦各爲圖解明其意。伏而審之。第四

五六術。其原皆出於第三術。可釋之以比例。第三術以勾弦較比股。若股與勾弦和。以股弦較比勾。若勾與股弦和。是爲三率連比例。凡有比例加減之其和較亦可互相比例。今第四五六術諸題皆可由第三術之題加減而得。即可因第三術之比例而另生比例。因比例以成同積。而諸術開方之所以然。遂於是得。試詳論如左。

凡有連比率三率。仍其首率而以首率中率相減爲中率。則其末率必爲原首率末率相加。轉減倍中率之數。仍其首率而以首率中率相加爲中率。則其末

率。必爲原首率末率相加。更加倍中率之數。

原式首率　三　　另式首率仍爲三

連中率　九　　連中率三九相減得六

比例末率　二十七　　比例末率（三加二七得三十　倍九得十八）相減得十二

如圖。原式連比例首率三。中率九。末率二十七。今仍其首率爲三。而以首率三與中率九相減。得六爲中率。中率六自乘首率三除之。得十二爲末率。此末率十二。卽原式首率三末率二十七相加得三十。轉減倍中率十八之數。而成另式連比例矣。此相減而得者也。

原首率　四　另首率仍為四
連式中率　六　連式中率 四六相加得十
比例末率　九　比例末率 四加九得十三倍六得十二 相加得二十五

如圖原式連比例首率四中率六末率九今仍其首率為四而以首率四與中率六相加得十為中率中率十自乘首率四除之得二十五為末率此末率二十五即原式首率四末率九相加得十三更加倍中率十二之數而成另式連比例矣此相加而得者也今第三術中有兩種連比例若更互如法求之可得八種另式連比例比例雖八種而因比例以成同積

者。止四種。則第四五術中之四題。可以得其故矣。

首率 勾弦較　　首率 仍爲勾弦較

中率 股　　中率 股 勾弦較 相減得弦和較

末率 勾弦和　　末率 股倍之爲倍股 勾弦較加勾弦和爲倍弦 相減得倍股弦較

首率 股弦較　　首率 仍爲股弦較

中率 勾　　中率 勾 股弦較 相減得弦和較

末率 股弦和　　末率 勾倍之爲倍勾 股弦較加股弦和爲倍弦 相減得倍勾弦較

此兩種另式連比例。中率皆爲弦和較。首末率雖不同。然以首末相乘。要皆爲勾弦較股弦較相乘倍之之數。而與中率弦和較自乘等積也。

首率勾弦和　首率仍爲勾弦和

中率股　中率勾弦和股相加爲弦和和

末率勾弦較　末率勾弦和加勾弦較爲倍弦股倍之爲倍股相加爲倍股弦和

首率股弦和　首率仍爲股弦和

中率勾　中率股弦和勾相加爲弦和和

末率股弦較　末率股弦和加股弦較爲倍弦勾倍之爲倍勾相加爲倍勾弦和

此兩種另式連比例中率皆爲弦和和首末率雖不同然以首末相乘要皆爲勾弦和股弦和相乘倍之之數而與中率弦和和自乘等積也

首率勾弦和

中率股　　中率勾弦和股相減爲弦較較

末率勾弦較　　末率勾弦和加勾弦較爲倍弦股倍之爲倍股相加爲倍股弦較

首率股弦較　　首率仍爲股弦較

中率勾　　中率股弦較勾相加爲弦較較

末率股弦和　　末率股弦較加股弦和爲倍弦勾倍之爲倍勾相加爲倍勾弦和。

此兩種另式連比例與中率皆爲弦較較首末率雖不同。然以首末相乘。要皆爲勾弦和股弦較相乘倍之之數。而與中率弦較較自乘等積也。

首率勾弦較　　首率仍爲勾弦較

中率股　　中率勾弦較股相加得弦較和

末率勾弦和　末率勾弦較加勾弦和爲倍弦股倍之爲倍股相加得倍股弦和

首率股弦和　首率仍爲股弦和

中率勾　中率股弦和勾相減得弦較和

末率股弦較　末率股弦和加股弦較爲倍弦勾倍之爲倍勾相減得倍勾弦較

此兩種另式連比例。中率皆爲弦較和。首末率雖不同。然以首末相乘。要皆爲勾弦較股弦和相乘倍之之數。而與中率弦較和自乘等積也。既因比例而知等積。即因等積而悟開方。第四術以首率末率求中率。故用開平方。第五術知中率。又知首率與半末率之較。求首末率。故用帶縱開方也。

凡有三率連比例。欲易為四率相當比例。仍其首率中率。為一率二率。而以首率中率和為三率。則其四率。必為中率末率和。以首率中率較為三率。則其四率必為中率末率較。

原式連比例
首率 九
中率 十八
末率 三十六

另式相當比例
一率 仍為九
二率 仍為十八
三率 九 十八 相加得二十七
四率 十八 三十六 相加得五十四

如圖以原式首率九為一率。中率一八為二率。而以首率九中率十八之和二十七為三率。二三率相乘。一率除之。得五十四為四率。此四率五十四。即中率十八末率三十六之

和而成另式相當比例矣。是以和與和相比也。

原式　首率　八　　一率仍為八
　　　中率　十二　二率仍為十二
連比例　末率　十八　三率八十二相減得四
　　　　　　　　　　四率十二十八相減得六

如圖以原式首率八為一率。中率十二為二率。而以首率八中率十二之較四為三率。二三率相乘一率除之得六為四率此四率六即中率十二末率十八之較。而成另式相當比例矣。是以較與較相比也。

今第三術中兩種連比例若更互如法和較之。凡得八種相當比例而第六術八題於是可推矣。

首率股弦較　一率仍為股弦較
中率勾　二率仍為勾
末率股弦和　三率股弦較勾相加得弦較較
四率勾股弦和相加得弦和和
此股弦較弦和和相乘所以與勾乘弦較較等積也。
首率勾弦較　一率仍為勾弦較
中率股　二率仍為股
末率勾弦和　三率勾弦較股相加得弦較和
四率股勾弦和相加得弦和和
此勾弦較弦和和相乘。所以與股乘弦較和等積也。

首率股弦較
中率勾
末率股弦和

一率仍為股弦較
二率仍為勾
三率股弦較勾相減得弦和較
四率勾股弦和相減得弦較和

此股弦較弦較和相乘。所以與勾乘弦和較等積也。

首率勾弦較
中率股
末率勾弦和

一率仍為勾弦較
二率仍為股
三率勾弦較股相減得弦和較
四率股勾弦和相減得弦較較

此勾弦較弦較較相乘。所以與股乘弦和較等積也。

首率股弦和　一率仍為股弦和
中率勾　二率仍為勾
末率股弦較　三率勾股弦和相加得弦和和
四率勾股弦較相加得弦較較
此股弦和弦較較相乘。所以與勾乘弦和和等積也。
首率勾弦和　一率仍為勾弦和
中率股　二率仍為股
末率勾弦較　三率股勾弦和相加得弦和和
四率股勾弦較相加得弦較和
此勾弦和弦較和相乘。所以與股乘弦和和等積也。

首率股弦和　一率仍爲股弦和

中率勾　二率仍爲勾

末率股弦較　三率股弦和勾相減得弦較和

四率勾股弦較相減得弦和較

此股弦和弦和較相乘。所以與勾乘弦較和等積也。

首率勾弦和　一率仍爲勾弦和

中率股　二率仍爲股

末率勾弦較　三率勾弦股股相減得弦較較

四率股勾弦較相減得弦和較

此勾弦和弦和較相乘。所以與股乘弦較較等積也。

各積既羃。卽可互求。今六術中八題所知者俱爲一率四率。又知一率卽二三率之較或和。故用帶縱開方求之。得二三率也。

一率何以爲二三率之較或和也。葢一率卽連比例首率。二率卽連比例中率。而三率又卽連比例首中率之較或和。其在首中率相加爲三率者。則爲首中率。其數內減去等中率之二率。必餘等首率之一率。故一率爲較。其在首中率相減爲三率而中率太首率小者。則爲中率內減首率餘數。以此減等中率之二率。亦必餘等首率之一率。故一率仍爲較。首率太

中率小者。則為首率內減中率餘數。以此加等中率之二率。始得等首率之一率。故一率為和。又此八種比例。用加法者四種。用減法而首率小者二種。故較有六。用減法而首率大者二種。故和止二也。